QF-3'加群と遺伝的捩れ理論の一般化 (代数と言語のアルゴリズムと計算理論)

竹花, 靖彦

数理解析研究所講究録
第 1712 巻 2010 年 64-75

QF-3' 加群と遺伝的捩れ理論の一般化

函館工業高等専門学校・一般科目理数系 竹花 靖彦 (Yasuhiko Takehana)
General Education, Hakodate National College of Tecnology

0. 序

環 R は単位元 1 を持ち，R-加群はユニタリーであるとする．右 R-加群全体を Mod-R で表す．以下 Mod-R で加群を考えることにする．Mod-R の短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対し $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ が完全性を保つとき M を入射的加群であるという．加群 X の部分加群 M が加群 X の非零な部分加群と常に非零な共通部分を持つとき M は本質的な X の部分加群であると言われる．加群 M を本質的な部分加群として含む入射的加群を入射被覆と言う．M の入射被覆は $\{X : X \supseteq M, X$ は入射的である $\}$ の中で極小元であり，また $\{Y : Y \supseteq M$, M は Y の本質的な部分加群である $\}$ の中の極大元であり，Zorn の補題を用いて入射被覆は存在し同型を除いて一意的に定まることが良く知られている．M の入射被覆を $E(M)$ で表す．$E(M)$ は M-torsionless, すなわち $E(M) \subseteq \Pi M$, とする．このとき M は QF-3' 加群と呼ばれる．

Mod-R の恒等関手の部分関手を弱根基と呼ぶ．すなわち σ が弱根基とは各加群 M, X, Y に対し，$\sigma(M) \subseteq M$ であり準同型写像 $f : X \to Y$ に対し $f(\sigma(X)) \subseteq \sigma(Y)$ が常に成立するときに言う．加群 Y とその部分加群 X に対し $\sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$ と $\sigma(Y/X) \supseteq (\sigma(Y)+X)/X$ が成り立つがこれは弱根基 σ の性質としてよく使われる．弱根基 σ が任意の加群 M について $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ が常に成り立つとき冪等であると言われ，$\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ が常に成立するとき根基であると言われる．また加群 $N \subseteq M$ に対し $\sigma(N) = N \cap \sigma(M)$ がいつも成立するとき弱根基 σ は左完全と言われる．左完全な弱根基は冪等になることはよく知られている．弱根基 σ に対し $\mathcal{T}_\sigma = \{M : \sigma(M) = M\}$ で $\mathcal{F}_\sigma = \{M : \sigma(M) = 0\}$ と定める．$\mathcal{T}_\sigma$ の元は σ-torsion であると言い，$\mathcal{F}_\sigma$ の元は σ-torsionfree であると言う．$Z \in \mathcal{T}_\sigma$ のとき，Mod-R の短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対し $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ が完全性を保つとき M を σ-入射加群であるという．加群 X の部分加群 M は X/M が σ-torsion のとき X の σ-稠密な部分加群であると言う．σ-稠密で本質的な部分加群を σ-本質的な部分加群と言う．加群 M を σ-本質的な部分加群として含む σ-入射加群を σ-入射被覆と言う．σ は冪等根基とするとき σ-入射被覆は $\{X : X \supseteq M, X$ は σ-入射加群である $\}$ の中で極小元であり，また $\{Y : Y \supseteq M, M$ は Y の σ-本質的な部分加群である $\}$ の中の極大元であり，$M_1/M = \sigma(E(M)/M)$ とおくと M の σ-入射被覆は M_1 に同型である．M の σ-入射被覆は M-torsionless

のとき M は σ-QF-3' 加群と呼ぶことにする．ここでは我々は σ-QF-3' 加群の特徴づけを行い，関連した遺伝的捩れ理論の一般化を行う．捩れ理論では最初から遺伝性を仮定してしまうことが多く遺伝性を仮定しない理論はあまり一般的とは言いがたいので詳しく述べることにする．ここに述べることは[12] の概説と [12] の背景となる遺伝性を仮定しない捩れ理論の基礎的事柄を述べる．

1. 捩れ理論と σ-入射被覆の基礎的事柄

[8] において倉田, 片山両氏は QF-3' 加群の特徴付けを行い，捩れ理論との関連性を見出した．ここでは我々は Dickson の捩れ理論を直接使い QF-3' 加群を一般化する．この章では σ-QF-3' 加群に必要な σ-入射被覆に関する基本的事柄を証明しておく．

σ が弱根基のとき $\sigma(E(M)/M) = E_\sigma(M)/M$ で $E_\sigma(M)$ を定義する．$E_\sigma(M)$ は必ずしも σ-入射被覆になるわけではないことを注意しておく．また Mod-$R \supseteq \mathcal{C}$ に対し $\mathcal{C}$ は $E_\sigma(-)$ で閉じているとは $M \in \mathcal{C}$ ならば $E_\sigma(M) \in \mathcal{C}$ が任意の加群 M で成立するときに言う．σ が冪等根基のときは σ-入射被覆で閉じていることと $E_\sigma(-)$ で閉じていることは同じである．

補題 1. $E_\sigma(M)$ は σ が根基なら σ-入射的加群である．

証明 任意の $f : X \to E_\sigma(M)$ が $Y/X \in T_\sigma$ のとき $g : Y \to E_\sigma(M)$ に拡張できればよい．

$$
\begin{array}{l}
0 \to X \to Y \to Y/X \to 0 \\
\quad f \downarrow \\
\quad E_\sigma(M) \overset{i}{\hookrightarrow} E(M)
\end{array}
$$

$i \cdot f$ は $g : Y \to E(M)$ に拡張される。$g|_X$ は $f : X \to E_\sigma(M)$ であるから g は $g' : Y/X \to E(M)/E_\sigma(M)$ を導く．$E(M)/E_\sigma(M) \simeq (E(M)/M)/(E_\sigma(M)/M)$ $= (E(M)/M)/\sigma(E(M)/M) \in F_\sigma$ で $Y/X \in T_\sigma$ であるから $g' = 0$ である。g' の作り方から $g(Y) \subseteq E_\sigma(M)$ であることがわかる．したがって $E_\sigma(M)$ は σ が根基なら σ-入射的加群になる．

Mod-$R \supseteq \mathcal{C}$ に対し $N \subseteq M$ とする．

(1) $N \in \mathcal{C}, M/N \in \mathcal{C}$ のとき $M \in \mathcal{C}$ が常に成り立つとき $\mathcal{C}$ は拡張で閉じていると言われる．

(2) $M \in \mathcal{C}$ のとき $N \in \mathcal{C}$ が常に成り立つとき $\mathcal{C}$ は部分加群で閉じていると言われる．

(3) $M \in \mathcal{C}$ のとき $M/N \in \mathcal{C}$ が常に成り立つとき $\mathcal{C}$ は商加群で閉じていると言われる．

σ が弱根基のとき $\mathcal{T}_\sigma$ は商加群と直和で閉じていて $\mathcal{F}_\sigma$ は部分加群と直積で閉じていることは簡単に証明できる．また $\mathcal{T}_\sigma$ が部分加群で閉じていて σ が冪等であることと σ が左完全であることは同値な条件であることは良く知られている．また $\mathcal{F}_\sigma$ が商加群で閉じていて σ が根基であることと σ が右完全であることは同値な条件であることも良く知られている．

補題 2．弱根基 σ について次が成り立つ．

(1) σ が冪等であるなら $\mathcal{F}_\sigma$ が拡張で閉じていてる．

σ が根基のとき $\mathcal{F}_\sigma$ が拡張で閉じているなら σ が冪等になる．

(2) σ が根基ならば $\mathcal{T}_\sigma$ が拡張で閉じている．

σ が冪等のとき $\mathcal{T}_\sigma$ が拡張で閉じているなら σ が根基になる．

証明 (1)($\rightarrow$)：σ は冪等とする．$N, M/N \in \mathcal{F}_\sigma$ とする．そのとき $0 = \sigma(M/N) \supseteq (\sigma(M)+N)/N$ であるから $\sigma(M) \subseteq N$ が得られる．よって $\sigma(M) = \sigma(\sigma(M)) \subseteq \sigma(N) = 0$ となり証明される．

($\leftarrow$)：$0 \rightarrow \sigma(M)/\sigma(\sigma(M)) \rightarrow M/\sigma(\sigma(M)) \rightarrow M/\sigma(M) \rightarrow 0$.

σ は根基であるから短完全列の左右は σ-torsionfree である．$\mathcal{F}_\sigma$ が拡張で閉じているので $M/\sigma(\sigma(M)) \in \mathcal{F}_\sigma$ である．弱根基の性質より $(\sigma(M)+\sigma(\sigma(M)))/\sigma(\sigma(M)) \subseteq \sigma(M/\sigma(\sigma(M))) = 0$．よって $\sigma(M) \subseteq \sigma(\sigma(M))$ であるから $\sigma(M) = \sigma(\sigma(M))$ が得られ，σ が冪等が得られる．

(2)($\rightarrow$): σ は根基で，$N, M/N \in \mathcal{T}_\sigma$ とする．そのとき $\sigma(M) \supseteq \sigma(N) = N$ が成り立つ．$0 = \sigma(M/\sigma(M)) \simeq \sigma((M/N)/(\sigma(M)/N)) \supseteq (\sigma(M/N) + \sigma(M)/N)/(\sigma(M)/N))$ である．したがって $\sigma(M/N)+\sigma(M)/N \subseteq \sigma(M)/N$. したがって $M/N = \sigma(M)/N$ が得られ，$M = \sigma(M)$ となる．

($\leftarrow$)：$\sigma(M/\sigma(M)) = M_1/\sigma(M)$ とおく．短完全列 $0 \rightarrow \sigma(M) \rightarrow M_1 \rightarrow \sigma(M/\sigma(M)) \rightarrow 0$ を考える．列の左右の項は σ-torsion より $M_1 \in \mathcal{T}_\sigma$ となる．$M \supseteq M_1 \supseteq \sigma(M)$ であるから $\sigma(M) \supseteq \sigma(M_1) \supseteq \sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ となり，$\sigma(M) = \sigma(M_1) = M_1$ である．よって $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ が得られる．

補題 3．弱根基 σ は冪等根基で $N \subseteq M$ とする．N は M の σ-本質的な部分加群であるならば $E_\sigma(N) = E_\sigma(M)$ となる．逆に $N \subseteq M$ で σ は左完全で冪等で $E_\sigma(N) = E_\sigma(M)$ であるならば N は M の σ-本質的な部分加群となる．

証明 ($\rightarrow$)：N は M の σ-本質的な部分加群とする．次の短完全列を考える．$0 \rightarrow M/N \rightarrow E_\sigma(M)/N \rightarrow \sigma(E(M)/M) \rightarrow 0$. 補題 2 より $E_\sigma(M)/N \in \mathcal{T}_\sigma$ となる．$E_\sigma(M)/N \twoheadrightarrow E_\sigma(M)/E_\sigma(N)$ であるから $E_\sigma(M)/E_\sigma(N) \in \mathcal{T}_\sigma$ となる．補題 1 より次の短完全列は分裂する．$0 \rightarrow E_\sigma(N) \rightarrow E_\sigma(M) \rightarrow E_\sigma(M)/E_\sigma(N) \rightarrow 0$.

よって $E_\sigma(M)$ のある部分加群 K があって $E_\sigma(M) = E_\sigma(N) \oplus K$ となる．N は M の本質的な部分加群で M は $E_\sigma(M)$ の本質的な部分加群であるか

ら N は $E_\sigma(M)$ の本質的な部分加群である．$E_\sigma(N) \cap K = 0$ であるから $N \cap K = 0$ となる．よって $K = 0$ が成立し $E_\sigma(N) = E_\sigma(M)$ となる．

($\leftarrow$)：$N \subseteq M$ で σ は左完全冪等根基で $E_\sigma(N) = E_\sigma(M)$ とする．$N \subseteq M \subseteq E_\sigma(M) = E_\sigma(N)$ であるから N は本質的な M の部分加群であることは明らかである．$M/N \hookrightarrow E_\sigma(M)/N = E_\sigma(N)/N \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$ である．

補題 **4**. σ は冪等根基とする．M は σ-入射的であることと $E_\sigma(M) = M$ であることは同値な条件である．

証明 ($\rightarrow$): M は σ-入射的であり，$E_\sigma(M)/M \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから短完全列 $0 \rightarrow M \rightarrow E_\sigma(M) \rightarrow E_\sigma(M)/M \rightarrow 0$ は分裂する．M は $E_\sigma(M)$ の本質的な部分加群であるから $E_\sigma(M) = M$ となる．

($\leftarrow$)：$M = E_\sigma(M)$ であるから補題 1 より M は σ-入射的加群である．

注意 σ は冪等根基とする．$E_\sigma(Y)$ の σ-入射性より $h : E_\sigma(X) \rightarrow E_\sigma(Y)$ があり、下図を可換図式にする。$h|_X = 1_X$ であるから $0 = ker1_X = \ker h|_X = \ker h \cap X$ である．X は $E_\sigma(X)$ の本質的な部分加群であるから，$kerh = 0$. よってこの h により $E_\sigma(X) \subseteq E_\sigma(Y)$ と考えることにする．

$$
\begin{array}{l}
X \hookrightarrow E_\sigma(X) \\
\downarrow_{1_X} \\
X \subset Y \subset E_\sigma(Y)
\end{array}
$$

命題 **5**. σ は冪等根基とするとき加群 X の加群 M に関する次の条件は同値である．

(1)X は M を σ-本質的な部分加群として含む σ-入射加群である．

(2)X は $\Gamma = \{Z : Z \supseteq M, Z$ は σ-入射加群である $\}$ の中で極小元である．

(3)X は $\Omega = \{Y : Y \supseteq M, M$ は Y の σ-本質的な部分加群である $\}$ の中の極大元である．

(4)$M_1/M = \sigma(E(M)/M)$ とおくと X は M_1 に同型である．

証明 (1)$\rightarrow$(2): $X \supseteq Z \supseteq M$ で X, Z は σ-入射加群とする．$E_\sigma(X) \supseteq E_\sigma(Z) \supseteq E_\sigma(M)$ と考える．補題 3 より $E_\sigma(X) = E_\sigma(M)$ である．補題 4 より $E_\sigma(X) = X$ で $E_\sigma(Z) = Z$ である．したがって $X = Z$ が得られ，極小性が成り立つ．

(2)$\rightarrow$(3)：$Y \supseteq X \supseteq M$ で M は X, Y の σ-本質的な部分加群であるとする．$Y = X$ を言いたい．(2) より X は σ-入射加群であるから $E_\sigma(X) = X$ である．$E_\sigma(Y) \supseteq E_\sigma(X) = X \supseteq E_\sigma(M) \supseteq M$ であり，X は M を含む入射加群の極小元で $E_\sigma(M)$ も M を含む入射加群であるから $X = E_\sigma(M)$ である．補題 3 より $E_\sigma(Y) = E_\sigma(M)$ であり $E_\sigma(M) = E_\sigma(X)$ である．よって $Y \supseteq X = E_\sigma(Y)$ である．かくして $Y = E_\sigma(Y)$ が得られ Y も σ-入射的となる．X は M を含む入射加群の中の極小元だから $Y = X$ が得られる．

(3)→(1)：X は σ-入射加群を言えば十分である．M は X の中で σ-本質的であるから補題 3 より $E_\sigma(M) = E_\sigma(X)$ が成り立つ．ここから次の記号を導入する．$M \underset{\sigma-ess}{\subseteq} \Omega \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} M$ は Ω の σ-本質的部分加群である．

$M \underset{\sigma-ess}{\subseteq} E_\sigma(M) = E_\sigma(X)$ であり，$M \underset{\sigma-ess}{\subseteq} X \subseteq E_\sigma(X)$ であるから X の極大性より $X = E_\sigma(X)$ が言える．よって X は σ-入射的となる．

(4)→(1)：$\sigma(E(M)/M) = M_1/M \subseteq E(M)/M$ であるから補題 1 より M_1 は σ-入射加群である．$M \subseteq M_1 \subseteq E(M)$ であるから M_1 は M を σ-本質的な部分加群として含む．

(1)→(4)：$M \underset{\sigma-ess}{\subseteq} X$ で X は σ-入射加群とする．そのとき補題 3 と補題 4 より $E_\sigma(M) = E_\sigma(X) = X$ が得られる．

2. 捩れ理論とそれに付随する QF-3' 加群

Mod-$R \supseteq \mathcal{T}$,$\mathcal{F}$ とする．次の (i),(ii),(iii) を満たすとき ($\mathcal{T}$,$\mathcal{F}$) は捩れ理論をなすと言う．

(i) $T \in \mathcal{T}$ であり $F \in \mathcal{F}$ であるとき $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$ が成り立つ．

(ii) 任意の $T \in \mathcal{T}$ で $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$ であるならば $F \in \mathcal{F}$ が成り立つ．

(iii) 任意の $F \in \mathcal{F}$ で $\mathrm{Hom}(T, \mathcal{F}) = 0$ がなりたつならば $T \in \mathcal{T}$ が成り立つ．

弱根基 t は冪等根基であるとき ($\mathcal{T}_t$,$\mathcal{F}_t$) が捩れ理論をなすことは良く知られている．逆に捩れ理論 ($\mathcal{T}$,$\mathcal{F}$) が与えられると冪等根基 t が存在し $\mathcal{T} = \mathcal{T}_t$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$ が成立する．以下それを示す．

Hom(-,_) 関手を使うことにより $\mathcal{T}$ は商加群，同型像，拡大と直和で閉じていることがわかる．同様に $\mathcal{F}$ は部分加群，同型像，拡大と直積で閉じている．

加群 M に対し $t(M) = \sum_{\mathcal{T} \ni N \subset M} N$ と定義する．$\bigoplus_{\mathcal{T} \ni N \subseteq M} N \twoheadrightarrow t(M)$ であり，$\mathcal{T}$ は商加群と直和をとることで閉じているから $t(M) \in \mathcal{T}$ であり $t(M)$ は $\{N{:}N \subseteq M, N \in \mathcal{T}\}$ の中で唯一の極大元である．$t(M) \in \mathcal{T}$ であるから t は冪等である．

$f \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ に対し $t(X) \in \mathcal{T}$ で $\mathcal{T}$ は商加群で閉じているから $f(t(X)) \in \mathcal{T}$ である．$f(t(X)) \subseteq Y$ であるから t の定義より $f(t(X)) \subseteq t(Y)$ となり，t は弱根基であることがわかる．

加群 M の部分加群 M_1 を $t(M/t(M)) = M_1/t(M)$ となるように決める．$\mathcal{T}$ は拡大で閉じていて $t(M) \in \mathcal{T}$ で $M_1/t(M) \in \mathcal{T}$ であるから $M_1 \in \mathcal{T}$ となる．$M_1 \supseteq t(M)$ で $t(M)$ は $\{N : N \subseteq M, N \in \mathcal{T}\}$ の中で唯一の極大元であるから $M_1 = t(M)$ が得られる．よって t は根基であることがわかる．

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_t$ であることを示すのはやさしい．

$M \in \mathcal{F}$ であるならば $t(M) \in \mathcal{T}$ であるから $\mathrm{Hom}(t(M), M) = 0$ が成り立つ．よって $1_{t(M)} = 0$ であり従って $t(M) = 0$ が得られる．したがって $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_t$ が得られる．もし $M \notin \mathcal{F}$ であるならば (ii) により $0 \neq T \in \mathcal{T}$ があって

$\mathrm{Hom}(T,M)\neq 0$ となる．それである $f\in\mathrm{Hom}(T,M)$ があって $0\neq f(T)\subseteq M$ となる．$M\in\mathcal{F}_t$ と仮定すると $f(T)\in\mathcal{F}_t\cap\mathcal{T}_t=\{0\}$ となり矛盾が起きるので $M\notin\mathcal{F}_t$ となる．それで $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{F}_t$ が得られ，したがって $\mathcal{F}=\mathcal{F}_t$ となることがわかる．

次に $t_1(M)=\underset{M/N\in\mathcal{F}}{\cap N}$ と t_1 を定義すると $t=t_1$ となることを示そう．$M/t_1(M)\subseteq\underset{M/N\in\mathcal{F}}{\Pi}(M/N)$ であり $\mathcal{F}$ は直積と部分加群を取ることで閉じているから $M/t_1(M)\in\mathcal{F}$ が従う．$M/t(M)\in\mathcal{F}$ であるから $t_1(M)$ の定義により $t_1(M)\subseteq t(M)$ がわかる．$t(M)/t_1(M)\subseteq M/t_1(M)$ であるから $t(M)/t_1(M)\in\mathcal{F}$ が従う．$t(M)\in\mathcal{T}$ であるから $t(M)/t_1(M)\in\mathcal{T}$ となる．よって $t(M)/t_1(M)\in\mathcal{T}\cap\mathcal{F}=\{0\}$ が言えて $t=t_1$ が従う．

加群 M，N に対し $k_N(M)$ を $\cap\{\ker f|f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)\}$ とおく．良く知られているように k_N は根基になる．また $\mathcal{T}_{k_N}=\{M\in\text{Mod-}R:\mathrm{Hom}_R(M,N)=0\}$ であり，$\mathcal{F}_{k_N}=\{M\in\text{Mod-}R:M\hookrightarrow\Pi N\}$ であることがわかる．ただし一般には（$\mathcal{T}_{k_N},\mathcal{F}_{k_N}$）は捩れ理論にはならない．さて σ は弱根基とする．加群 M とその σ-稠密部分加群 N に対し $t(N)=N\cap t(M)$ がいつも成立するとき弱根基 t は σ-左完全であると言う．Mod-$R\supseteq\mathcal{C}$ に対し $\mathcal{C}$ が σ-拡大で閉じているとは $N\in\mathcal{C}$ であり $M/N\in\mathcal{C}\cap\mathcal{T}_\sigma$ であるとき常に $M\in\mathcal{C}$ が成立するときに言う．また $\mathcal{C}$ が σ-本質的拡大で閉じているとは，N が M の σ-本質的部分加群で $N\in\mathcal{C}$ であるなら $M\in\mathcal{C}$ がいつも成立するときに言う．

定理 6. A は非零な加群で σ は弱根基とする．そのとき次の (1),(2) と (3) の条件は同値である．σ は冪等根基ならば (1),(2),(3) と (4) の条件は同値である．さらに σ が左完全な冪等根基で A は σ-torsion ならば全ての条件は同値である．

(1) A は σ-QF-3' 加群である．すなわち $E_\sigma(A)\hookrightarrow\Pi A$ が成り立つ．

(2) $k_A(E_\sigma(A))=0$.

(3) $k_A(-)=k_{E_\sigma(A)}(-)$.

(4) k_A は σ-左完全な弱根基である．

(5) L が σ-torsion である短完全列 $0\to N\xrightarrow{f}M\to L\to 0$ において $\mathrm{Hom}_R(f,A)=0$ のとき $\mathrm{Hom}_R(N,A)=0$ が成り立つ．

(6) (i) $\mathcal{T}_{k_A}$ は σ-稠密 部分加群で閉じている．

(ii) $\mathcal{F}_{k_A}$ は σ-拡大で閉じている．

(7) $\mathcal{F}_{k_A}$ は $E_\sigma(-)$ で閉じている．

(8) $\mathcal{F}_{k_A}$ は σ-本質的拡大で閉じている．

証明．(1)→(3): 加群 M に対し $k_A(M)\supseteq k_{E_\sigma(A)}(M)$ は明らかである．よって $k_A(M)\subseteq k_{E_\sigma(A)}(M)$ を示せばよい．$0\neq m\in k_A(M)$ とする．ある $f\in\mathrm{Hom}_R(M,E_\sigma(A))$ があって $f(m)\neq 0$ となる．$E_\sigma(A)$ は A-torsionless

であるから ある $g \in \mathrm{Hom}_R(E_\sigma(A), A)$ があって $g(f(m)) \neq 0$ となる．これは $gf \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$ で $m \in k_A(M)$ に矛盾する．よって $k_A(M) \subseteq k_{E_\sigma(A)}(M)$ は従う．

(3)→(2): $0 = k_{E_\sigma(A)}(E_\sigma(A)) = k_A(E_\sigma(A))$ であるから明らかである．

(2)→(1): ϕ は $E_\sigma(A)$ から $\prod_{f_i \in I} A_{f_i}$ への準同型写像とする．ここで $I = \mathrm{Hom}_R(E_\sigma(A), A), x \in E_\sigma(A) \Rightarrow \phi(x) = \prod_{f_i}(f_i(x))$ である．仮定より ϕ は単型である．

(3)→(4): σ は 冪等根基とする. 加群 N は加群 M の σ-稠密部分加群とする．$k_A(N) \subseteq N \cap k_A(M)$ は明らかである．σ は 根基であるから $E_\sigma(A)$ は σ-入射加群である．よって $k_{E_\sigma(A)}(N) \supseteq N \cap k_{E_\sigma(A)}(M)$ は成り立つ．仮定により $k_A(N) \supseteq N \cap k_A(M)$ は成り立つから $k_A(N) = N \cap k_A(M)$ が成り立つ．

(4)→(2): σ は冪等弱根基であるから $E_\sigma(A)/A \in \mathcal{T}_\sigma$ は成り立つ．よって仮定より $A \cap k_A(E_\sigma(A)) = k_A(A) = 0$ が従う．$E_\sigma(A)$ は A の本質的拡大であるから $k_A(E_\sigma(A)) = 0$ が従う．

以下の証明では σ は左完全な 根基で $A \in \mathcal{T}_\sigma$ であることを仮定する．

(1)→(5): $0 \to N \xrightarrow{f} M \to L \to 0$ は L が σ-torsion である短完全列であるとする．もし $\mathrm{Hom}_R(N, A) \ni g \neq 0$ とすると g は $g'f = ig$ を満たす $g' \in \mathrm{Hom}_R(M, E_\sigma(A))$ となる．ただし i は A から $E_\sigma(A)$ への包含写像とする．$ig \neq 0$ で $E_\sigma(A) \subseteq \Pi A$ であるから ある $p \in \mathrm{Hom}_R(E_\sigma(A), A)$ があって $pig \neq 0$ となる．そのとき $0 \neq pig = pg'f \in \mathrm{Hom}_R(f, A) = 0$ であるから矛盾が起きる．よって $\mathrm{Hom}_R(N, A) = 0$ が従う．

(5)→(2): $N = k_A(E_\sigma(A))$ とおく．$\mathcal{T}_\sigma$ は拡大で閉じているから $E_\sigma(A) \in \mathcal{T}_\sigma$ となる．$\mathcal{T}_\sigma$ は商加群で閉じているから $E_\sigma(A)/N \in \mathcal{T}_\sigma$ が従う．次の短完全列を考える．$0 \to N \xrightarrow{f} E_\sigma(A) \to E_\sigma(A)/N \to 0$.

$\mathrm{Hom}_R(E_\sigma(A), A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(f,A)} \mathrm{Hom}_R(N, A)$ が成り立つ．$N = k_A(E_\sigma(A))$ であるから $\mathrm{Hom}_R(f, A) = 0$ が従う．よって仮定より $\mathrm{Hom}_R(N, A) = 0$ となる．

次に $N = 0$ を示す．$N \neq 0$ と仮定する．A は $E_\sigma(A)$ の本質的拡大であるから $N \cap A \neq 0$ が従う．$N/(N \cap A) \simeq (N + A)/A \subseteq E_\sigma(A)/A \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $N/(N \cap A) \in \mathcal{T}_\sigma$ となる．短完全列 $0 \to N \cap A \xrightarrow{g} N \to N/(N \cap A) \to 0$ を考えて $\mathrm{Hom}_R(N \cap A, A) \neq 0$ であるから $\mathrm{Hom}_R(g, A) \neq 0$ が従う．しかしこれは $\mathrm{Hom}_R(N, A) = 0$ に矛盾する．よって $N = 0$ が従う．

(4)→(8): $N \in \mathcal{F}_{k_A}$ は M の σ-本質的部分加群とする．仮定より $0 = k_A(N) = N \cap k_A(M)$ となり N は M で本質的部分加群であるから $k_A(M) = 0$ が成り立つ．

(8)→(7): $E_\sigma(M)$ は M の σ-本質的拡大であるから明らかである．

(7)→(6): (i) N は $M \in \mathcal{T}_{k_A}$ の σ-稠密部分加群とする. 行が短完全列である次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \xrightarrow{i} & M & \to & M/N & \to & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow f & & & & \\ 0 & \to & N/k_A(N) & \xrightarrow{j} & E_\sigma(N/k_A(N)), & & & & \end{array}$$

ただし i と j は包含写像で h は標準的な全型で f は $E_\sigma(N/k_A(N))$ の σ-入射性より導かれる準同型写像とする.

$N/k_A(N) \in \mathcal{F}_{k_A}$ であるから仮定より $E_\sigma(N/k_A(N)) \in \mathcal{F}_{k_A}$ となる. しかしこのとき $M \in \mathcal{T}_{k_A}$ であるから at $f = 0$ が従い $h = 0$ が得られる. h は全型であるから $N/k_A(N) = 0$ が従う.

(ii): $N \in \mathcal{F}_{k_A}$ は $M/N \in \mathcal{F}_{k_A} \cap \mathcal{T}_\sigma$ である M の部分加群とする. $E_\sigma(N)$ の σ-入射性より N から $E_\sigma(N)$ への包含写像 i は $f \in \mathrm{Hom}_R(M, E_\sigma(N))$ に拡張される. 仮定より $E_\sigma(N) \in \mathcal{F}_{k_A}$ であるから $f(k_A(M)) \subseteq k_A(E_\sigma(N)) = 0$ が従う. $M/N \in \mathcal{F}_{k_A}$ であるから $0 = k_A(M/N) \supseteq (k_A(M) + N)/N$ である. 従って $N \supseteq k_A(M)$ が成り立つ. よって次の等式が得られる. $0 = f(k_A(M)) = i(k_A(M)) = k_A(M)$. 従って $M \in \mathcal{F}_{k_A}$ を得る.

(6)→(1): 最初に $k_A(E_\sigma(A)) \subsetneqq E_\sigma(A)$ を示す. $E_\sigma(A) \in \mathcal{T}_{k_A}$ ならば $E_\sigma(A)/A \in \mathcal{T}_\sigma$ なので (i) より $A \in \mathcal{T}_{k_A}$ となる. しかし $A \in \mathcal{F}_{k_A}$ なので $A = 0$ が成り立つがこれは仮定に反する. よって $E_\sigma(A) \notin \mathcal{T}_{k_A}$ となり $k_A(E_\sigma(A)) \subsetneqq E_\sigma(A)$ が得られる.

次に $k_A(E_\sigma(A)) = 0$ を示す. $K = k_A(E_\sigma(A))$ とおく. もし $K \neq 0$ ならば A は $E_\sigma(A)$ の本質的拡大であるから $A \cap K \neq 0$ が得られる. 従って $\mathrm{Hom}_R(A \cap K, A) \neq 0$ であるから $A \cap K \notin \mathcal{T}_{k_A}$ が得られる. $K/(A \cap K) \simeq (A + K)/A \subseteq E_\sigma(A)/A \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $K \notin \mathcal{T}_{k_A}$ が成り立つ. それで $k_A(K) \subsetneqq K$ が従う. K'$= k_A(K)$ とおく. $A \in \mathcal{T}_\sigma$ で $E_\sigma(A)/A \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $E_\sigma(A) \in \mathcal{T}_\sigma$ が成り立つ. よって $E_\sigma(A)/K \in \mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{F}_{k_A}$ が成立する. K/K'$\in \mathcal{F}_{k_A}$ であるから (ii) より $E_\sigma(A)/K$'$\in \mathcal{F}_{k_A}$ が成り立つ. そのとき $K = k_A(E_\sigma(A)) \subseteq K$' が当てはまる. これは K'$= k_A(K) \subsetneqq K$ に矛盾する. よって $K = 0$ が従う.

σ が恒等関手ならば σ は左完全根基で A は σ-torsion となるから, このとき σ-QF-3' 加群は QF-3' 加群になる. 次に $\sigma = k_{E(R_R)}(-)$ とする. そのとき良く知られているように σ は左完全根基になる. 捩れ理論 $(\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$ は Lambek の捩れ理論と呼ばれる. R_R の捩れ理論 $(\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$ に関する局所化は右極大商環として良く知られている. Q を右極大商環とすると $Q = E_\sigma(R)$ であるから定理6の(1)〜(4)の応用として次の結果が得られる.

帰結 7. Q は右極大商環とする. そのとき次の条件は同値である.

(1) Q は torsionless(つまり $Q \hookrightarrow \Pi R$) である.

(2) $k_R(Q) = 0$ が成り立つ.

(3) $k_R(-) = k_Q(-)$ が成り立つ.

(4) $\mathrm{Hom}_R(M/N, E(R)) = 0$ のとき $k_R(N) = N \cap k_R(M)$ が成り立つ.

以下与えられた紙数の都合で証明は補題 11 と定理 13 を除いて省略する．

命題 8. σ は左完全な根基ならば次の条件は同値である．

(1) $\mathcal{T}_{k_A}$ は σ-稠密部分加群で閉じている．

(2) $\mathcal{T}_{k_A} = \mathcal{T}_{k_{E_\sigma(A)}}$ が成り立つ．

加群 M に対し $Z(M)$ は M の singular 部分加群，すなわち $Z(M) := \{m \in M :$ ある R_R の本質的イデアル I があって $mI = 0$ となる $\}$, とする．singular 関手 Z は左完全な弱根基である．singular 加群については [5] を見よ．

命題 9. σ が左完全根基で $A \in \mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{F}_Z$ とする．次の条件は同値である．

(1) $\mathcal{T}_{k_A}$ は σ-稠密部分加群で閉じている．

(2) A は σ-QF-3' 加群である．

命題 10. σ は冪等根基とする．σ-QF-3' 加群は σ-本質的な拡大で閉じている．

3. σ-左完全な弱根基と σ-遺伝的捩れ理論

弱根基 t が左完全な根基のとき $(\mathcal{T}_t,\mathcal{F}_t)$ は遺伝的捩れ理論と呼ばれ，$\mathcal{T}_t$ は部分加群をとることで閉じている．良く知られているようにこの条件は $\mathcal{F}_t$ は入射被覆で閉じているという条件と同値である．ここでは左完全な弱根基を捩れ理論を使って拡張する．

2 章で述べたように σ が弱根基のとき加群 M の任意の σ-稠密部分加群 N に対して $t(N) = N \cap t(M)$ が成り立つとき t を σ-左完全な弱根基と言う．加群 A が σ-QF-3' で $t = k_A$ とおくと t は σ-左完全な根基となる．

補題 11. σ は冪等根基で t は弱根基とする。E_1, E_2 は M を含む入射加群とする。このとき $M \cap t(E_1^\sigma) = M \cap t(E_2^\sigma)$ となる。ただし $\sigma(E_i/M) = E_i^\sigma/M (i = 1,2)$ とおく。

証明 恒等写像 1_M に対し次の可換図式が得られる。なぜなら σ は冪等であるから $\sigma(E_1/M) \in \mathcal{T}_\sigma$ であり、σ は根基であるから E_2^σ は σ-入射加群である。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & M & \to & E_1^\sigma & \to \sigma(E_1/M) \to 0 \\ & \downarrow 1_M & & \downarrow h & \\ & M & \to & E_2^\sigma & \end{array}$$

h の M への制限 $h|_M$ は 1_M である。そのとき $M \cap t(E_1^\sigma) = h(M \cap t(E_1^\sigma)) \subseteq h(M) \cap h(t(E_1^\sigma)) \subseteq M \cap t(E_2^\sigma)$

同様に $M \cap t(E_1^\sigma) \subseteq M \cap t(E_2^\sigma)$ も言えるから $M \cap t(E_1^\sigma) = M \cap t(E_2^\sigma)$ となる。

また次のように弱根基 t と冪等根基 σ を用いて σ-左完全な弱根基 t_σ を作ることができる.

命題 12. t を弱根基とし σ を冪等根基とする. 加群 M に対し $t_\sigma(M)$ を $M\cap t(E_\sigma(M))$ とおく. このとき補題11により $t_\sigma(M)$ は $E(M)$ をどのように選んでも唯一に定まるが, t_σ は σ-左完全な弱根基になる.

定理 13. σ は冪等根基とする. そのとき弱根基 t に関して次が成り立つ. (5)←(1)⇔(2)→(3)⇔(4). また t が根基なら (4)→(1) が成り立つ. さらに t は冪等弱根基で σ が左完全なら (5)(i)→(1) が成り立つ. よって t が冪等根基で σ が左完全な冪等根基なら次の全ての条件は同値である.

(1) t は σ-左完全な弱根基である.
(2) $t(M)=M\cap t(E_\sigma(M))$ が任意の加群 M で成立する.
(3) $\mathcal{F}_t$ は σ-本質的拡大で閉じている.
(4) $\mathcal{F}_t$ は σ-入射被覆で閉じている.
(5) (i) $\mathcal{T}_t$ は σ-稠密部分加群で閉じている.
(ii) $\mathcal{F}_t$ は σ-拡大で閉じている.

証明. (1)→(2): $E_\sigma(M)/M\in\mathcal{T}_\sigma$ であるから明らかである.

(2)→(1): N は加群 M の σ-稠密部分加群とする. $M/N\in\mathcal{T}_\sigma$ であり $E_\sigma(M)/M\in\mathcal{T}_\sigma$ であるから $E_\sigma(M)/N\in\mathcal{T}_\sigma$ が従う. よって $E_\sigma(M)/E_\sigma(N)\in\mathcal{T}_\sigma$ が成り立つ. 従って $E_\sigma(M)$ のある部分加群 K があって $E_\sigma(M)=E_\sigma(N)\oplus K$ となる. そのときモジュラー則より次の等式が得られる. $E_\sigma(N)\cap t(E_\sigma(M))=E_\sigma(N)\cap\{t(E_\sigma(N)\oplus t(K)\}=t(E_\sigma(N))\oplus\{E_\sigma(N)\cap t(K)\}=t(E_\sigma(N))$. よって更に, $t(N)=N\cap t(E_\sigma(N))=N\cap E_\sigma(N)\cap t(E_\sigma(M))=N\cap t(E_\sigma(M))=N\cap M\cap t(E_\sigma(M))=N\cap t(M)$ が得られる.

(1)→(3): $N\in\mathcal{F}_t$ は M の σ-本質的部分加群とする. そのとき $0=t(N)=N\cap t(M)$ が得られ $t(M)=0$ を得る.

(3)→(4): M は $E_\sigma(M)$ の σ-本質的部分加群であるから明らかである.

(4)→(3): $N\in\mathcal{F}_t$ は M の σ-本質的部分加群であるとする. 仮定より $E_\sigma(N)\in\mathcal{F}_t$ が成り立つ. 補題3より $E_\sigma(M)=E_\sigma(N)$ が従う. よって $E_\sigma(M)\in\mathcal{F}_t$ が得られる. $\mathcal{F}_t$ は部分加群で閉じているから $M\in\mathcal{F}_t$ が得られる.

(1)→(5): (i) N は $M\in\mathcal{T}_t$ の σ-稠密部分加群とする. そのとき $t(N)=N\cap t(M)=N\cap M=N$ であるから $N\in\mathcal{T}_t$ となる.

(ii) $N\in\mathcal{F}_t$ とは $M/N\in\mathcal{F}_t\cap\mathcal{T}_\sigma$ が成り立つ M の部分加群とする. そのとき $0=t(M/N)\supseteq(t(M)+N)/N$ でるから $N\supseteq t(M)$ が成り立つ. 仮定より $0=t(N)=N\cap t(M)=t(M)$ が成立し $M\in\mathcal{F}_t$ が成り立つ.

(4)→(1): t は根基で N は M の σ-稠密部分加群とする. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \xrightarrow{g} & M & \to & M/N & \to & 0 \\ & & \downarrow_j & & \downarrow_f & & & & \\ 0 & \to & N/t(N) & \xrightarrow{i} & E_\sigma(N/t(N)), & & & & \end{array}$$

ただし g と i は包含写像で j は標準的な全型で f は $E_\sigma(N/t(N))$ の σ-入射性より引き起こされる準同型写像とする．t は根基であるから $N/t(N) \in \mathcal{F}_t$ が従う．仮定より $E_\sigma(N/t(N)) \in \mathcal{F}_t$ は成り立つ．そのとき $f(t(M)) \subseteq t(E_\sigma(N/t(N))) = 0$ が成り立つから $t(M) \subseteq \ker f$ が従う． $f|_N$ は f の N への制限写像とする．そのとき $t(N) = \ker j = \ker f|_N = N \cap \ker f \supseteq N \cap t(M) \supseteq t(N)$ が成り立つ．よって $t(N) = N \cap t(M)$ が従う．

(5)→(1): t は冪等根基で σ は左完全弱根基とする．t は冪等弱根基であるから $\mathcal{F}_t$ は拡大で閉じている．よって (i) だけを用いる．N は加群 M の σ-稠密部分加群とする．$t(M)/(N \cap t(M)) \simeq (t(M)+N)/N \subseteq M/N \in \mathcal{T}_\sigma$ が成り立つから $N \cap t(M)$ は $t(M) \in \mathcal{T}_t$ の σ- 稠密部分加群である．従って $N \cap t(M) \in \mathcal{T}_t$ が成立する．よって $t(N) \subseteq N \cap t(M) = t(N \cap t(M)) \subseteq t(N)$ が成り立ち $t(N) = N \cap t(M)$ が成り立つ．

σ が弱根基とする．$\mathcal{T}$ が σ-稠密な部分加群で閉じているとき捩れ理論 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は σ-遺伝的捩れ理論と呼ぶことにする．σ-遺伝的捩れ理論は定理 13 により σ が左完全根基のとき $\mathcal{F}$ が σ-入射被覆で閉じているという条件と同値である．

命題 14. σ は左完全弱根基で t は弱根基とする．次の条件は同値である．

(1) 任意の加群 M の部分加群 N で $t(M) \supseteq N$ で $t(M)/N \in \mathcal{T}_\sigma$ とする．このとき $N \in \mathcal{T}_t$ となる．

(2) t は冪等弱根基であり，また σ-左完全な弱根基でもある．

命題 15. t は冪等弱根基で σ は根基で $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_t$ を満足するものとする．このとき $\mathcal{F}_t$ が σ-入射被覆で閉じているならそのとき $\mathcal{F}_t$ は入射被覆で閉じている．

命題 16. σ は弱根基とする．全ての加群 M で $\sigma(M) \supseteq Z(M)$ が成立するならばそのとき σ-左完全弱根基は左完全な弱根基である．

定理 17. σ は左完全冪等根基で $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は捩れ理論とする．また $Q \in \mathcal{F}$ があって $\mathcal{T} = \{M \in \text{Mod-}R : \text{Hom}_R(M,Q) = 0\}$ と書けているものとする．

このとき $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ が σ-遺伝的であるための必要充分条件は Q として σ-QF-3' 加群が取れることである．

命題 18. σ は左完全な根基で $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は σ-遺伝的捩れ理論で，ある σ-QF-3' 加群 Q が $\mathcal{F}$ にあり $\mathcal{T} = \{M \in \text{Mod-}R : \text{Hom}_R(M,Q) = 0\}$ とする．さらに $M \in \mathcal{T}_\sigma$ とする．

このとき $M \in \mathcal{F}$ であることと $M \subseteq \Pi Q$ であることとは同値な条件である．

参考文献

1. L. Bican, **QF-3' modules and rings, Commentationes Mathematicae**, Universitatis Carolinae, 14(1973), 295-301.

2. R. R. Colby and E. A. Rutter Jr., **Semi-primary QF-3' rings,** Nagoya Math. J. 32(1968), 253-258.

3. S. E. Dickson, **A torsion theory for abelian categories**, Trans. Amer. Math. Soc. 121(1966), 223-235.

4. J. S. Golan, "**Localization of Noncommutative Rings**". Marcel Dekker, New York, 1975.

5. K. R. Goodearl, "**Ring Theory**", Marcel Dekker, New York, 1976.

6. J. P. Jans, H. Y. Mochizuki and L. E. T. Wu, **A characterization of QF-3 rings**, Nagoya Math. J. 27(1966), 7-13.

7. J. P. Jans, H. Y. Mochizuki, **torsion associated with duality,** Tohoku Math. J. 32(1972), 449-452.

8. Y. Kurata and H. Katayama, **On a generalization of QF-3' rings,** Osaka Journal of Mathematics, 13(1976), 407-418.

9. K. Ohtake, **Colocalization and Localization**, Journal of pure and applied algebra 11(1977), 217-241.

10. K. Ohtake, **Equivalence between colocalization and localization in abelian categories with applications to the theory of modules**, Journal of Algebra 79(1982), 169-205.

11. Bo Stenstrom, "**Rings and modules of Quotients**". Springer -Verlag, Berlin, 1975.

12. Yasuhiko Takehana, On generalization of QF-3'modules and hereditary torsion theories, Preprint

13. C. Vinsonhaler, **A note on two generalizations of QF-3**, Pac. J. Math. 40(1972), 229-233.

General Education, Hakodate National College of Technology,
14-1, Tokura-cho, Hakodate-shi, Hokkaido, 042-8501 Japan
Email takehana@hakodate-ct.ac.jp